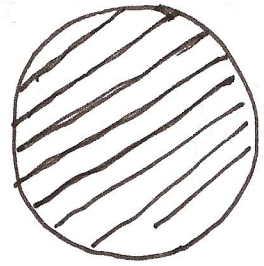
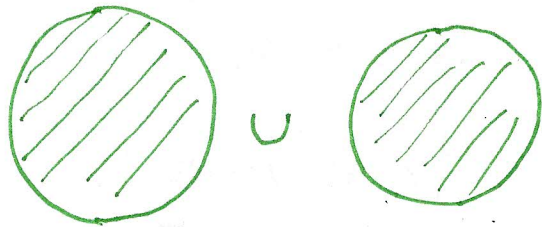


Ergänzungen:

①

metrischer Raum X :
(Vollkugel in $\mathbb{R}^n$)metrischer Raum Y :(Vereinigung 2^{er}
disjunkter Voll-
kugeln in $\mathbb{R}^n$)Wie unterscheiden sich X und Y ?

Def 16.15

 Sei X ein metrischer Raum.

- a) Ein Weg in X ist eine stetige Abbildung
 $\gamma: [a, b] \rightarrow X$. $\gamma(a)$ bzw. $\gamma(b)$
 heißt Anfangs- bzw. Endpunkt von γ .
 γ heißt geschlossen, falls $\gamma(a) = \gamma(b)$.

b) X heißt (weg)zusammenhängend : $\Leftrightarrow$ -222-

zu beliebigen $x, y \in X$ gibt es einen

Weg von x nach y .



c) entsprechend für Teilmengen A von X .

Satz 16.19: Seien X, Y metrische Räume und $f: X \rightarrow Y$ stetig. Ist $A \subset X$ wegzusammenhängend, so auch $f(A)$.

Beweis: Seien

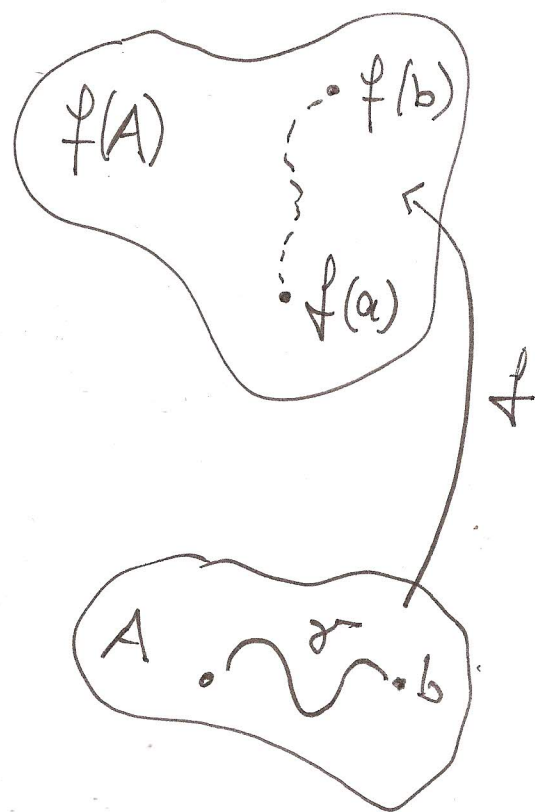
$$f(a), f(b) \in f(A)$$

mit $a, b \in A$.

Ist γ Weg von a nach b in A , so

ist $f \circ \gamma$ Weg

von $f(a)$ nach $f(b)$ in $f(A)$.



□

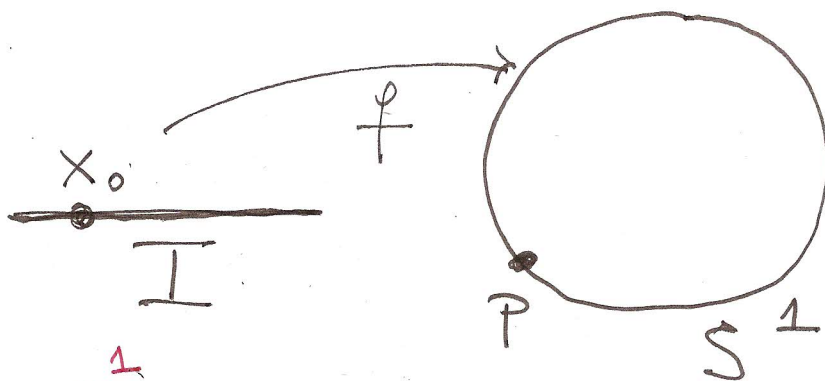
man überlege sich:

i) $A \subset \mathbb{R}$ zusammenhängend $\iff$
 A ist ein Intervall

ii) Satz: $S^1 := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\}$ ist
nicht homöomorph zu einem
 Intervall.

Idee zu ii):

(indirekt)



Sei f ein

Homöomorphismus, x_0 innerer Punkt

von I und $P := f(x_0)$.

betrachte

$$f_0 := f|_{I - \{x_0\}} : I - \{x_0\} \rightarrow S - \{P\}$$

$\Rightarrow f_0$ Homöomorphismus zwischen

$I - \{x_0\}$ und $S - \{P\}$,

$S - \{P\}$ ist wegzusammenhängend,

$I - \{x_0\}$ offensichtlich nicht, Wspr. zu

Satz 16.19

als spezielle zusammenhängende Mengen $\square$

II Konvexe Mengen / Funktionen (in $\mathbb{R}^n$)

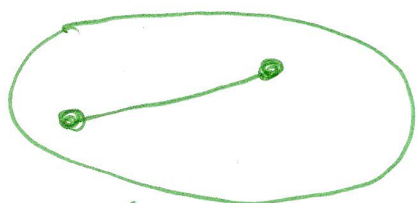
(vgl. Def. 10.3 + Ausführungen danach

für $n = 1, 2$)

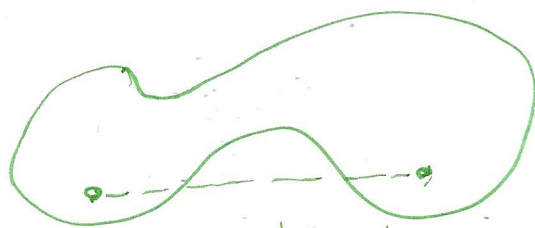
(oder $\subset X =$
 $\mathbb{R}$ -Vektorraum)

Def 16.16: $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt Konvex: $\iff$

mit $x, y \in M$ gehört auch die Strecke
von x nach y ganz zu M



Konvex



nicht konvex

0.) M konvex $\implies M$ zusammenhängend -225-

Bem: 1.) In Formeln gilt

$$M \text{ konvex} \iff t x + (1-t) y \in M$$

$$\text{für alle } 0 \leq t \leq 1, x, y \in M \iff$$

$$\sum_{i=1}^L t_i x_i \in M \quad \text{für alle } L \in \mathbb{N},$$

$$x_1, \dots, x_L \in M, \quad 0 \leq t_i \leq 1 \text{ mit}$$

$$\sum_{i=1}^L t_i = 1$$

(zeige die letzte Implikation $\implies$ "!")

$$2.) M_\alpha, \alpha \in I, \text{ konvex} \implies \bigcap_{\alpha \in I} M_\alpha \text{ konvex}$$

(falsch für $\bigcup_{\alpha \in I} M_\alpha$)

3) Konvexität hat nichts mit einer Metrik oder Norm zu tun!

Beispiele:

① Unterräume (auch affine) von $\mathbb{R}^n$ sind konvex

② Halbräume $H := \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot a \leq c\}$
 (für ein $a \in \mathbb{R}^n$ und ein $c \in \mathbb{R}$) sind konvex.
 in einem V.R.

③ Sei $\|\cdot\|$ irgendeine Norm $\implies$
 $B_R(a)$ und $\overline{B}_R(a)$ sind konvex

Bew: Seien etwa $x, y \in \overline{B}_R(a)$ und $t \in [0, 1]$

$$\implies \|tx + (1-t)y - a\| = \|t(x-a) + (1-t)(y-a)\| \leq$$

$$t\|x-a\| + (1-t)\|y-a\| \leq tR + (1-t)R = R$$

④ M konvex $\implies \overline{M}$ konvex ($\neq$ i.a.)

Def 16.17: Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ konvex und
 $f: K \rightarrow \mathbb{R}$. f heißt konvex.

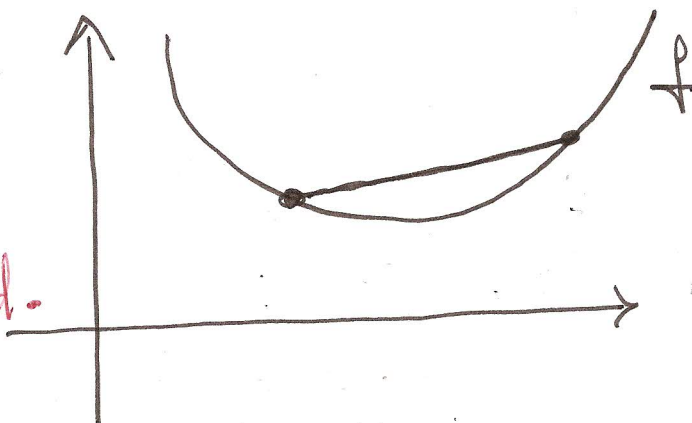
Funktion, falls

-227-

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$$

für alle $0 \leq t \leq 1, x, y \in K$.

Die Def. gilt
wörtlich, wenn
 $\mathbb{R}^n$ durch einen
 $\mathbb{R}$ -V.R. ersetzt wird.



Bem: 1.) streng konvex...: $\Leftrightarrow$

$$f((1-t)x + ty) < (1-t)f(x) + tf(y)$$

$$\forall 0 < t < 1, x \neq y \in K$$

2.) ... konkav ... , ... streng konkav ...

: $\Leftrightarrow -f$ konvex, ... streng konvex...

3.)  a) f konvex $\Leftrightarrow$

$$f\left(\sum_{i=1}^L t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^L t_i f(x_i)$$

für jede Wahl von $x_1, \dots, x_L \in K$
 und $t_1, \dots, t_L \in [0, 1]$, $\sum_{i=1}^L t_i = 1$.

$$b) \quad f \text{ konvex} \iff \left\{ x \in K : f(x) \leq c \right\} \text{ konvex } \forall c \in \mathbb{R}$$

Schließlich gilt: (aber nur im " $\mathbb{R}^n$ " also für $\dim < \infty$)

Satz 16.21 Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex.

Ist $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ konvex, so ist

f stetig.

□

Beweis: Hildebrandt, Analysis II, p. 75,
 Satz 9 (auf kompakten Teilmengen K
 von G ist f sogar Lipschitz).

§ 17 Differenzierbare Kurven

-229-

Wir kennen Wege in $\mathbb{R}^n$ (vgl. Def. 16.15),
also stetige Abbildungen $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$
von einem Parameterintervall $[a, b]$ in den
Raum $\mathbb{R}^n$.

Beispiele: 1.) $\alpha: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \alpha(t) = e^{it}$

beschreibt die 1-Kreislinie um 0.

2.) $\beta_k: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \beta_k(t) = e^{ikt}$

auch, wenn $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$; allerdings
durchläuft man den Kreis jetzt $|k|$ -mal
und für $k < 0$ in entgegengesetzter Richtung

3.) Seien $r > 0$ und $c \neq 0$. Dann

$$\text{ist } \begin{cases} \gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \\ \gamma(t) := (r \cos t, r \sin t, ct) \end{cases}$$

die sogenannte Schraubenlinie ($\hat{=}$

Rotation in der xy -Ebene bei gleichzeitiger Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit c längs der z -Achse)

Bei 1.) - 3.) handelt es sich nicht nur

um Wege, sondern um sogenannte differenzierbare Kurven, für die man

geometrische Größen einführen kann. ~~schon~~ ~~hier~~

Def. 17.1 : „diff'bare Kurven“ (in $\mathbb{R}^n$)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $k \geq 1$

und $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$. γ heißt

diff'bare Kurve der Klasse C^k : $\Leftrightarrow$

alle Komponentenfunktionen $\gamma_1, \dots, \gamma_n$
von γ sind auf I k -mal stetig
diff'bar.

$\gamma'(t) := (\gamma_1'(t), \dots, \gamma_n'(t))$ wird
Tangentenvektor an die Kurve γ zur
Zeit t genannt.

Bem., Bsple, Notationen: 1.) Man

überlege sich :

$$\left\{ \begin{array}{l} e \in \mathbb{R}^n \text{ Tangentenvektor an } \gamma \text{ in } t \Leftrightarrow \\ \lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{1}{h} (\gamma(t+h) - \gamma(t)) - e \right\| = 0 \\ \text{bzgl. irgendeiner Norm auf } \mathbb{R}^n \end{array} \right.$$

2.) Die Punktmenge (– die man zeichnet –)

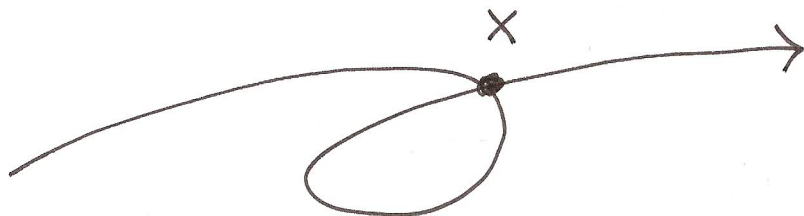
$$\boxed{\text{Spur } \gamma} := \{ \gamma(t) \in \mathbb{R}^n : t \in I \}$$

ist zu unterscheiden von der Kurve γ !

3.) $x \in \text{Spur } \gamma$ heißt Doppelpunkt

: $\Leftrightarrow$ x wird mindestens 2 mal
durchlaufen, d.h.

$$\exists t_1, t_2 \in I : \gamma(t_1) = x = \gamma(t_2) \\ t_1 \neq t_2$$



offenbar gilt: $\begin{cases} \gamma \text{ doppelpunktfrei} \iff \\ \gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ injektiv} \end{cases}$

4.) $\begin{cases} n = 2: \text{ ebene Kurve} \\ n = 3: \text{ Raumkurve} \end{cases}$

5.) Graphenkurven: Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$

eine Funktion der Klasse C^k . Die

Graphenkurve

$$\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (t, f(t))$$

ist doppelpunktfrei mit

$$\gamma'(t) = (1, f'(t))$$

als Tangentenvektor, z.B.

Parabel: $t \mapsto (t, t^2)$

Def 17.2

Eine C^k -Kurve $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$

heißt **regulär** : $\iff \gamma'(t) \neq 0 \forall t \in I$

Bspl + Bem:

① $\gamma: \mathbb{R} \ni t \mapsto e^{it} \in \mathbb{R}^2$ ist wegen

$$\gamma'(t) = i e^{it}$$

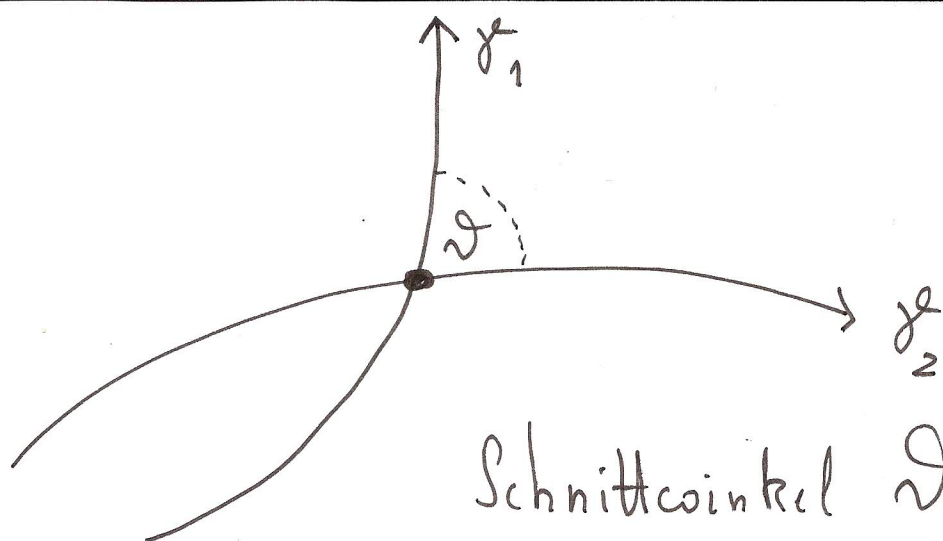
zwar regulär, aber nicht doppelpunktfrei.

② Graphenkurven $\gamma: I \ni t \mapsto (t, f(t)) \in \mathbb{R}^2$
sind regulär.

③ Seien γ_1, γ_2 regulär und

$$X \in \text{Spur } \gamma_1 \cap \text{Spur } \gamma_2,$$

etwa $X = \gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2).$



Schnittwinkel $\vartheta :=$

Winkel zwischen $\gamma_1'(t_1)$ und $\gamma_2'(t_2)$, d.h.

$$\cos \vartheta = \frac{\gamma_1'(t_1)}{|\gamma_1'(t_1)|} \cdot \frac{\gamma_2'(t_2)}{|\gamma_2'(t_2)|}$$

($\cdot$), $|\cdot|$ = Eukl. Skalarprodukt u. Norm)



Die Länge von Wegen:

Def 17.3 : Sei $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein
stetiger Weg.

a) Ist $\mathcal{Z} := \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b\}$

Bem : ① wie immer gilt:

$$\mathcal{Z}' \text{ feiner als } \mathcal{Z} \implies L(\mathcal{Z}) \leq L(\mathcal{Z}').$$

Daraus folgt:

⑧ γ rektifizierbar $\iff$
 $\sup \{ L(\mathcal{Z}) : \mathcal{Z} \text{ Zerlegung von } [a,b] \} < \infty$

In diesem Fall ist die Länge von γ
 $= \sup \{ L(\mathcal{Z}) : \dots \}.$

② Achtung: Rektifizierbarkeit von γ_n
hängt nicht davon ab, wie man $\mathbb{R}^n$
normiert, die Länge L schon!

③ es gibt nicht-rektifizierbare Wege!
(Bepl. auf Blatt 10)

④ Zusammenhang mit Analysis I:

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ rektifizierbar} \\ \iff \gamma_1, \dots, \gamma_n \in BV([a, b]) \end{array} \right.$$

(Verweis auf ③: nicht jede stetige Fkt. ist BV!)

← Lektion 16

Bei diff'baren Kurven ist nun alles in Ordnung!

Satz 17.1

Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ von der Klasse C^1 . Dann gilt für die Länge L von γ bzgl. einer Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$

$$L = L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt,$$

C^1 -Kurven sind also rektifizierbar.

Bem: Man sieht, wie die Länge von $\|\cdot\|$ abhängt